

Основные свойства степеней

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

$$a^{p+g} = a^p \cdot a^g$$

$$\frac{a^p}{a^g} = a^{p-g}$$

$$(a^p)^g = (a^g)^p = a^{p \cdot g}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b} \right)^p$$

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad 1^n = 1$$

$$0^n = 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Основные свойства степеней

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a; \quad \text{где } a \geq 0$$

Основные свойства степеней

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a; & \text{если } a \geq 0 \\ -a; & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \text{при } a \geq 0; \quad b \geq 0$$

$$\sqrt[x]{a}; \quad \text{где } x \geq 2$$

Формулы сокращенного умножения

- * Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- * Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- * Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Кубические уравнения

* Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

* Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

* Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

* Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Находим Дискриминант

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

В случае когда квадратное уравнение имеет два корня, соответствующий квадратный трехчлен может быть разложен на множители по следующей формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Если квадратное уравнение имеет один корень, то разложение соответствующего квадратного трехчлена на множители задается следующей формулой (обратите внимание, что скобка в квадрате):

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Теорема Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \times x_2 = c \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Основные свойства модуля

1. $|a| \geq 0$;
2. $|a| = |-a|$;
3. $|a| \geq a$;
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
5. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, если $b \neq 0$;

Основные свойства модуля

6. $|a + b| \leq |a| + |b|$;
7. $|a + b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \geq 0$;
8. $|a + b| = a + b$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$ и $b \geq 0$;
9. $|a - b| \leq |a| + |b|$;
10. $|a - b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \leq 0$;
11. $|a| - |b| \geq 0$ тогда и только тогда, когда $a^2 - b^2 \geq 0$.

Некоторые методы решения уравнений с модулями

$$|f(x)| = a, \text{ где } a \geq 0$$

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x)$$

$$\begin{cases} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{cases} \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Некоторые методы решения уравнений с модулями

Оба этих типа уравнений можно решать и другим способом: раскрывая соответствующим образом модуль на промежутках где подмодульное выражение имеет определённый знак. В этом случае будем получать совокупность двух систем. Приведем общий вид решений получающихся для обоих типов уравнений приведённых выше:

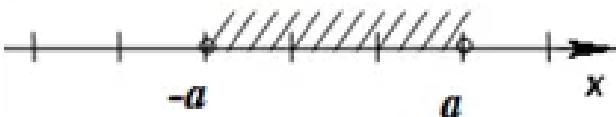
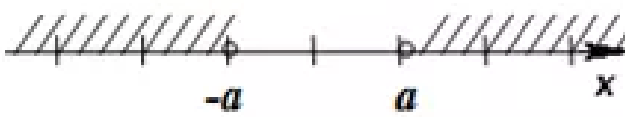
$$|f(x)| = a \Rightarrow \begin{cases} -f(x) = a, \\ f(x) < 0; \\ f(x) = a, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad |f(x)| = g(x) \Rightarrow \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \\ f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Как решать неравенства с модулем

Воспользуемся данной формулой

$$|f(x)| = a \Rightarrow \begin{cases} -f(x) = a, \\ f(x) < 0; \\ f(x) = a, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Области решений

$ x < a$	$ x > a$
$-a < x < a$	$x > a$ и $x < -a$
	
$\begin{cases} x < a \\ x > -a \end{cases}$	$\begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases}$

Области решений

$ x \leq a$	$ x \geq a$
$-a \leq x \leq a$	$x \geq a$ и $x \leq -a$
	
$\begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$

Подсказка

**В ответ идут все
варианты, ВСЕ**

**В ответ идут только
пересечения вариантов, только
общие варианты для системы**

Пробуем решить

Задание Решить неравенство $|x + 1| > 1$

Решение Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} x + 1 > 1 \\ x + 1 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

Объединяя эти интервалы, получим $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

Ответ $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

Пробуем решить

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |f(x)| > a \\ \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases} \end{cases}$$

« больше большего
меньше меньшего »

внешние
участки

$$\begin{cases} |f(x)| < a \\ \begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases} \end{cases}$$

« между »

внутренний
участок

Пробуем решить

$$|f(x)| = a, \text{ где } a \geq 0 \quad \begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

Если у числа "а" не меняем значение,
то знак неравенства оставляем
неизменным

Если числу "а" придаем
отрицательное значение, то знак
неравенства меняется на
противоположный

Задание Решить неравенство $|2x - 1| < 9$

Решение Исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 < 9 \\ 2x - 1 > -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 10 \\ 2x > -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 5) \\ x \in (-4; +\infty) \end{cases}$$

Пересекая эти два интервала, получим решение $x \in (-4; 5)$

Ответ $x \in (-4; 5)$

Пробуем решить

Задание Решить неравенство $1 \leq |x - 2| \leq 5$

Решение Заданное двойное неравенство можно записать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} |x - 2| \geq 1 \\ |x - 2| \leq 5 \end{cases}$$

Первое неравенство равносильно совокупности неравенств

$$|f(x)| = a \Rightarrow \begin{cases} -f(x) = a, \\ f(x) < 0; \\ f(x) = a, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 \geq 1 \\ x - 2 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [3; +\infty) \\ x \in (-\infty; 1] \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$$

Второе неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 \leq 5 \\ x - 2 \geq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 7] \\ x \in [-3; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 7]$$

Тогда получим,

$$\begin{cases} |x - 2| \geq 1 \\ |x - 2| \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty) \\ x \in [-3; 7] \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 1] \cup [3; 7]$$

Ответ $x \in [-3; 1] \cup [3; 7]$

Пробуем решить

$$|f(x)| = g(x) \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Задание Решить неравенство $|x + 1| \leq |x - 2|$

Решение Возведем обе части этого неравенства в квадрат

$$(x + 1)^2 \leq (x - 2)^2$$

Распишем полученные квадрат суммы и квадрат разности по формулам сокращенного умножения:

$$x^2 + 2x + 1 \leq x^2 - 4x + 4$$

Приводя подобные, получим:

$$6x \leq 3 \Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in (-\infty; 0,5]$$

Ответ $x \in (-\infty; 0,5]$

Шпаргалка для решения неравенств с модулями

1. При $a < 0$ уравнение $|f(x)| = a$ не имеет корней
2. При $a = 0$ уравнение $|f(x)| = a$ равносильно уравнению $f(x) = 0$.
3. При $a > 0$ уравнение $|f(x)| = a$ равносильно совокупности
$$\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a \end{cases}$$
4. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
5. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$
6. $|f(x)| = -|g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases}$
7. $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0$
8. $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$
9. $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$

Решаем сами

1. $|x| < 3$

2. $|x + 2| > -2$

3. $|x - 7| \leq 0$

4. $|x + 1| > 3$

5. $|2 - x| < 5$

6. $|x - 3| < 2 - 4x$

7. $4|2 - x| > 1 - x$

8. $|x - 2|(x - 1) > 0$

9. $|2x^2 - 9x + 15| \geq 2$

10. $|3 + x| \geq 3$

11. $\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{3}$

12. $|x^3 - 1|(x - 9) < 0$

13. $|x - 2| + |x + 2| \leq 4$

14. $x^2 - |5x + 6| > 0$

ВСЕ МОЛОДЦЫ!!!



“Тот, кто не знает математики,
не может узнать никакой другой
науки и даже не может
обнаружить своего невежества!”

Английский философ и
естествоиспытатель XIII века

Роджер Бэкон

