

Матемáтика

Буквально – изучение, наука. Наука, первоначально исследовавшая количественные отношения и пространственные формы.

Более современное понимание: это наука об отношениях между объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, — именно тех, которые в качестве аксиом положены в основание той или иной математической теории.

ГОЛОВОЛОМКА

$$\text{shoe} + \text{shoe} + \text{shoe} = 30$$

$$\text{man} + \text{man} + \text{shoe} = 20$$

$$\text{ice cream} + \text{ice cream} + \text{man} = 13$$

$$\text{shoe} + \text{man} \times \text{ice cream} = ?$$

Отгадаете?



01. Вводный курс элементарной математики

- * Некоторые базовые сведения по основным математическим операциям
- * Формулы сокращенного умножения
- * Квадратное уравнение и формула разложения квадратного трехчлена на множители
- * Парабола
- * Основные свойства степеней
- * Основные свойства математических корней

Квадратные уравнения (квадратный трёхчлен)

Уравнение - это равенство, содержащее в себе переменную, значение которой нужно найти.

Если переменная, входящая в уравнение, возведена во вторую степень (в квадрат), то такое уравнение называют **уравнением второй степени** или **квадратным уравнением**.

Стандартное квадратное уравнение выглядит так:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, x — неизвестное.

Число a называют первым или старшим коэффициентом;
число b называют вторым коэффициентом;
число c называют свободным членом.

Назовите коэффициенты а, b и c в уравнениях:

* $3x^2 + 2x - 16 = 0$

* $3x^2 - 7x + 4 = 0$

* $-5 + 4x^2 + x = 0$

* $2x^2 + 6x - 8 = 0$

* $2x^2 - 10x + 20 = 0$

* $x + 1 = x^2 + 1$

Сначала приведем уравнение к стандартному виду!

$-x^2 + x + 1 - 1 = 0$ $-x^2 + x = 0$

* $8x^2 - 25x = 3x^2 + 6x$

$5x^2 - 19x = 0$

* $4x - 5x^2 = 0$

* $x^2 - 9 = 0$

Неполные квадратные уравнения

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение называется **неполным**.

$$4x - 5x^2 = 0$$

Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения - проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.

Например,

$$2x^2 - 5x = 0.$$

Имеем $x(2x - 5) = 0$. Значит, либо $x = 0$, либо $2x - 5 = 0$, то есть $x = 2,5$.

$$3x^2 - 27 = 0.$$

Имеем $3x^2 = 27$. Следовательно корни данного уравнения - 3 и -3.

Для удобства работы с уравнением рекомендуется **всегда делать коэффициент а положительным.**

Для этого левую и правую части уравнения всегда можно домножить на -1 .

Например, $-3x^2+4x-10=0$ заменим на $3x^2-4x+10=0$.

По-простому говоря, каждое слагаемое меняет знак.

$$-7x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$=$$

$$7x^2 + 6x - 2 = 0$$

Поиск дискриминанта (D)

Дискриминант - это латинское слово, означающее *»различитель«*. Это выражение подобно индикатору позволяет отличить уравнение, имеющее корни, от уравнения, не имеющего корней.

То есть дискриминант позволяет заранее узнать, имеет ли уравнение корни или нет. Дискриминант квадратного уравнения обозначается через букву *D*

$$D = b^2 - 4ac$$

В уравнении $2x^2 + x + 2 = 0$

коэффициенты *a*, *b* и *c* равны 2, 1 и 2 соответственно.

Подставим их в формулу $D = b^2 - 4ac$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times 2 = 1 - 16 = -15.$$

Вычислите дискриминант в уравнениях:

* $x^2 - 6x + 9 = 0$

* $x^2 - 5x + 6 = 0$

* $2x^2 - x + 1 = 0$

* $18 + 3x^2 - x = 0$

* $2x^2 + 12x + 18 = 0$

* $x^2 + 2x - 8 = 0$

Находим корни уравнения

У нас есть дискриминант D .
Далее все зависит от его знака.

Если $D < 0$,
то квадратное уравнение не имеет корней.

Например, в уравнении $x^2 - x + 1 = 0$ дискриминант равен $-3 < 0$. Поэтому корней нет. Это значит, что какое бы число вы не выбрали, подстановка его в выражение $x^2 - x + 1$ вместо x никогда не даст 0.

Находим корни уравнения

У нас есть дискриминант D .
Далее все зависит от его знака.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень, который ищется по формуле:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Например, в $x^2 - 4x + 4 = 0$ дискриминант $D = 0$.
Тогда $x = -(-4) / 2 \cdot 1 = 2$. Ответ: 2.

Находим корни уравнения

У нас есть дискриминант D .
Далее все зависит от его знака.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня,
которые находят по формулам:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

Например, в уравнении $x^2 - 5x + 6 = 0$ дискриминант $D = 1 > 0$.
Тогда $x = 5 - \sqrt{1} / 2 \cdot 1$ и $x = 5 + \sqrt{1} / 2 \cdot 1$.
Так как $\sqrt{1} = 1$, то $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.
Ответ: 2;3.

Найдем корни квадратных уравнений:

- * $x^2 + 5x + 6 = 0$

- * $7x^2 - 6x + 2 = 0$

- * $2x(x+2) = 8x+3$

- * $(y-4)(y+3) = -12$

- * $(x+4)^2 = 3x+40$

- * $x^2 - 16x - 1 = 5x(x-4)$

Разложение квадратного трехчлена на множители

В случае когда квадратное уравнение имеет два корня, соответствующий квадратный трехчлен может быть разложен на множители по следующей формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Если квадратное уравнение имеет один корень, то разложение соответствующего квадратного трехчлена на множители задается следующей формулой (обратите внимание, что скобка в квадрате):

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- * Разложить на множители следующий квадратный трёхчлен:

$$3x^2 + 7x - 6$$

Найдём корни квадратного трёхчлена:

$$3x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$D = 49 - 4 \times 3 \times (-6) = 49 + 72 = 121$$

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 11}{6} = -\frac{18}{6} = -3$$

Воспользуемся формулой разложения:

$$a = 3, \quad x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -3$$

$$3x^2 + 7x - 6 = 3 \left(x - \frac{2}{3} \right) (x + 3) = (3x - 2)(x + 3)$$

*

Разложим на множители квадратный трехчлен:

* $x^2 - 8x + 12 = 0$

* $x^2 - 6x - 7 = 0$

* $x^2 - 6x + 9 = 0$

Теорема Виета

Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

То есть, если имеется приведённое квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$, а его корнями являются числа x_1 и x_2 , то справедливы следующие два равенства:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \times x_2 = c \end{cases}$$

Знак системы (фигурная скобка) говорит о том, что значения x_1 и x_2 удовлетворяют обоим равенствам.



Франсуа Виет
(1540 – 1603)

Теорема Виета

В случае неприведенного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ формулы Виета имеют вид:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Значимость теоремы Виета заключается в том, что, не зная корней квадратного трехчлена, мы легко можем вычислить их сумму и произведение. Теорема Виета позволяет угадывать целые корни квадратного трехчлена.

Используя теорему Виета, найти корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$

Согласно теореме Виета, имеем, что

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 x_2 = 6$$

Подбираем значения x_1 и x_2 , которые удовлетворяют этим равенствам. Легко видеть, что им удовлетворяют значения

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 3$$

Ответ. Корни уравнения $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - 8x + 15 = 0$.

По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком. Тогда:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

А произведение корней равно свободному члену. В уравнении $x^2 - 8x + 15 = 0$ свободным членом является 15. Тогда:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \times x_2 = 15 \end{cases}$$

Теперь проверим действительно ли сумма корней равна 8, и равно ли произведение 15. Для этого найдём корни данного уравнения:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$a = 1, k = -8, c = 15$$

$$D_1 = 64 - 4 \times 15 = 64 - 60 = 4$$

$$x_1 = \frac{-(-8) + 2}{2} = \frac{8 + 2}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-(-8) - 2}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3$$

Видим, что корнями уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$ являются числа 5 и 3. Их сумма равна 8, а произведение чисел 5 и 3 равно 15.

Значит выражение $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \times x_2 = 15 \end{cases}$ является справедливым

Обратная теорема Виета

Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то они удовлетворяют квадратному уравнению $x^2+px+q=0$, то есть являются его корнями.

Зная, что числа $x_1=3$ и $x_2=-1$ - корни некоторого квадратного уравнения, составить само это уравнение.

Решение. Пусть искомого квадратное уравнение имеет вид:
 $x^2+px+q=0$

Тогда, согласно теореме Виета, его коэффициенты связаны с корнями следующими соотношениями:

$$x_1+x_2=-p, x_1x_2=q$$

Тогда

$$p=-(x_1+x_2)=-(3+(-1))=-2$$

$$q=x_1x_2=3 \cdot (-1)=-3$$

То есть искомого уравнение $x^2-2x-3=0$

*

Решить уравнение, используя
обратную теорему Виета:

* $x^2 + 16x + 15 = 0$

* $x^2 - 10x - 39 = 0$

* $x^2 - 4x + 4 = 0$

Из истории квадратных уравнений

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

Задача: «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение — 96».

$$(10+x)(10-x) = 96,$$

или же

$$100 - x^2 = 96.$$

$$x^2 - 4 = 0$$

Отсюда $x = 2$.

Одно из искомых чисел равно 12, другое 8.
Решение $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

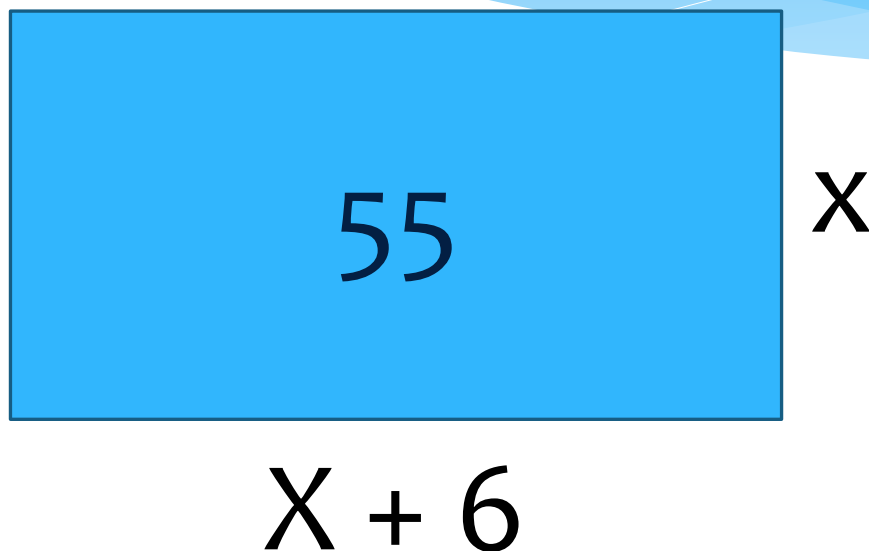


Диофант Александрийский
3 в.

Решение «земельных» задач геометрическим способом



Решение «земельных» задач геометрическим способом



S прямоугольника = AB

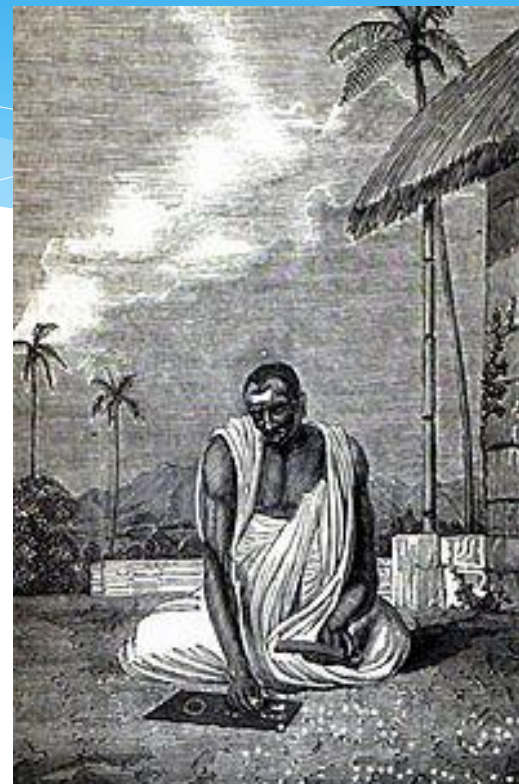
$$X(x + 6) = 55$$

В итоге получаем квадратное уравнение $X^2 + 6x - 55 = 0$,
корнями которого будут 5 и -11.

Из истории квадратных уравнений

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме $ax^2 + bx = c, a > 0$

В уравнении коэффициенты, кроме a , могут быть отрицательными.



Брахмагупта
7 в.

Задача индийского математика Бхаскары

$$(x/8)^2 + 12 = x$$

$$x^2/64 + 12 = x$$

приводим к общему
знаменателю:

$$x^2/64 + 12 \cdot 64/64 = 64 \cdot x/64$$

$$x^2 + 768 = 64x$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$D = (-64)^2 - 4 \cdot 768 = 1024$$

$$\sqrt{1024} = 32$$

$$x_1 = (64 + 32)/2 = 48$$

$$x_2 = (64 - 32)/2 = 16$$

**Ответ: в стае, или 48, или 16
обезьянок**

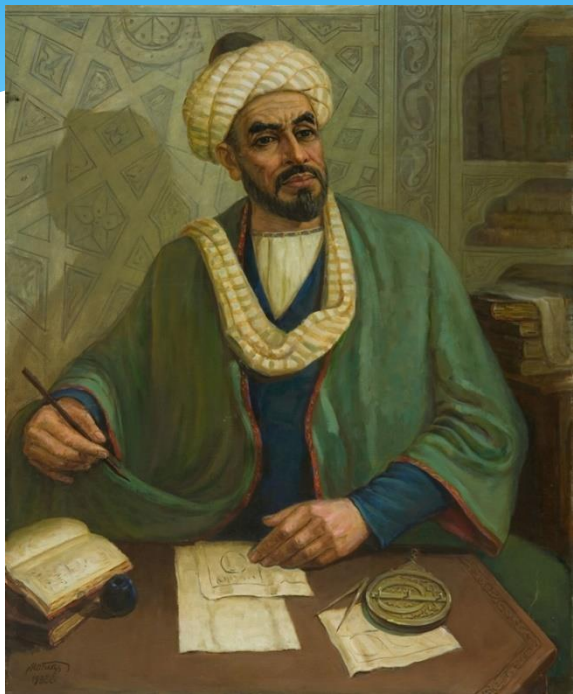
Решение Бхаскары
свидетельствует о том, что автор
знал о двузначности корней
квадратных уравнений.

«Обезьянок разных стае»



Ты скажи мне, в этой стае?»

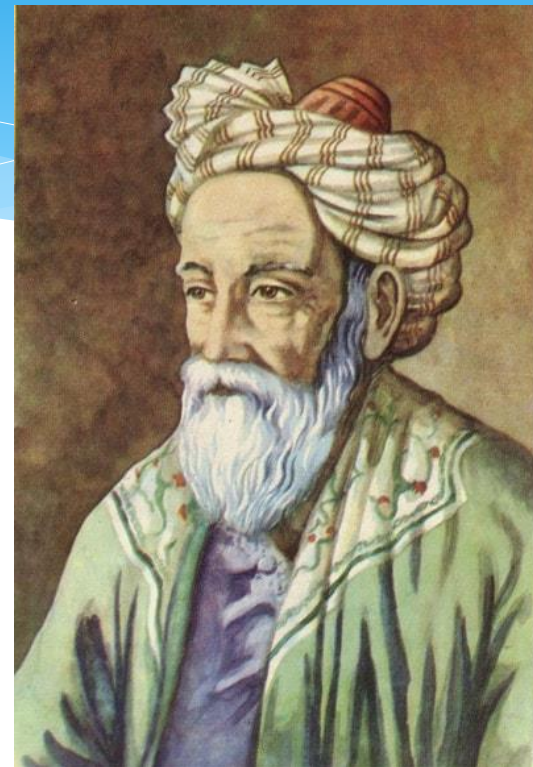
Из истории квадратных уравнений



Аль-Хорезми
780-846

Трактат Аль-Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

Омар Хайям классифицировал кубические уравнения, имеющие положительные корни, выдвинул теорию геометрических решений алгебраических уравнений.



Омар Хайям
1048-1131

Золотое сечение

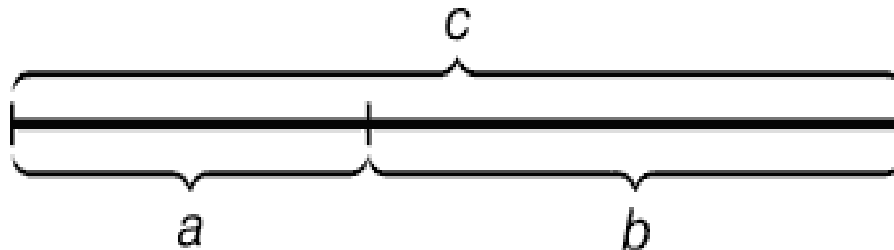
Форма, в основе построения которой лежат сочетание симметрии и золотого сечения, способствует наилучшему зрительному восприятию и появлению ощущения красоты и гармонии.

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему:

$$a : b = b : c$$

или

$$c : b = b : a \text{ или } a : b = (a + b) : a$$



Для золотого сечения математики договорились использовать греческую букву Φ , и равна эта величина $\Phi \approx 1,618$

Имеется отрезок АВ, разделённый на два
других точкой С. Отрезок АС равен x , а отрезок
ВС – y . Точка С находится в таком положении,
что выполняется равенство: $(x+y)/x=x/y$.

Необходимо найти отношение x/y .



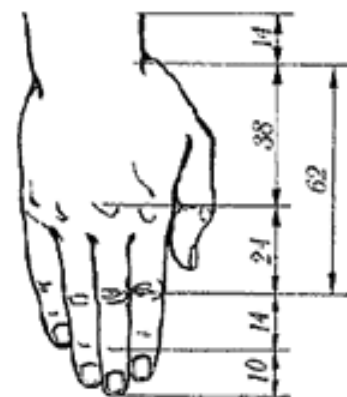
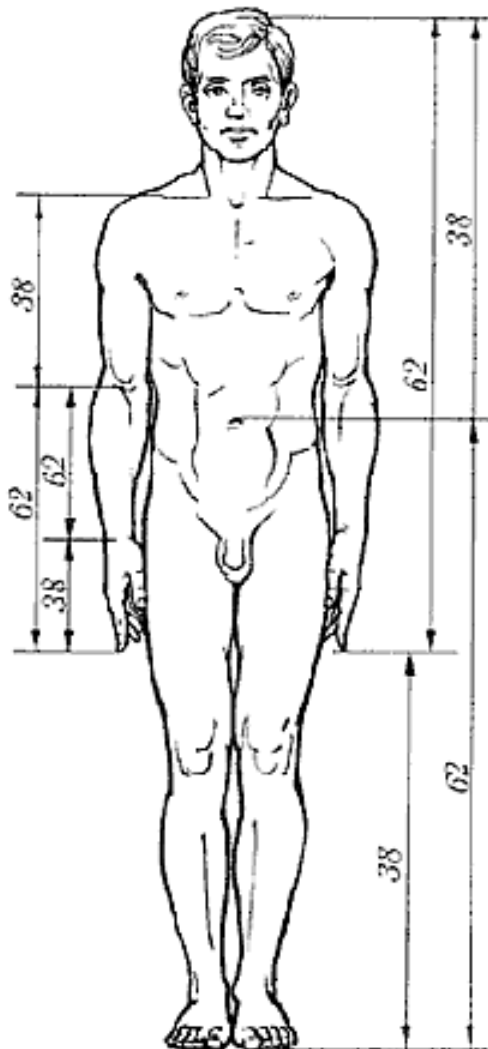
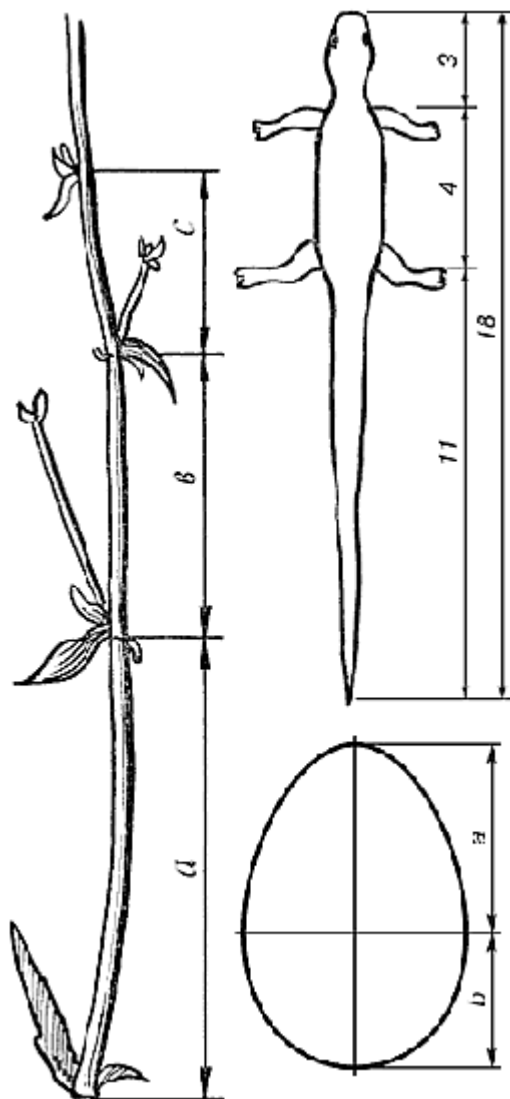
Пусть $x/y=\Phi$. Преобразуем выражение $(x+y)/x=x/y$:

$$\frac{x+y}{x} = \Phi \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \Phi \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi + 1 = \Phi^2 \Rightarrow$$

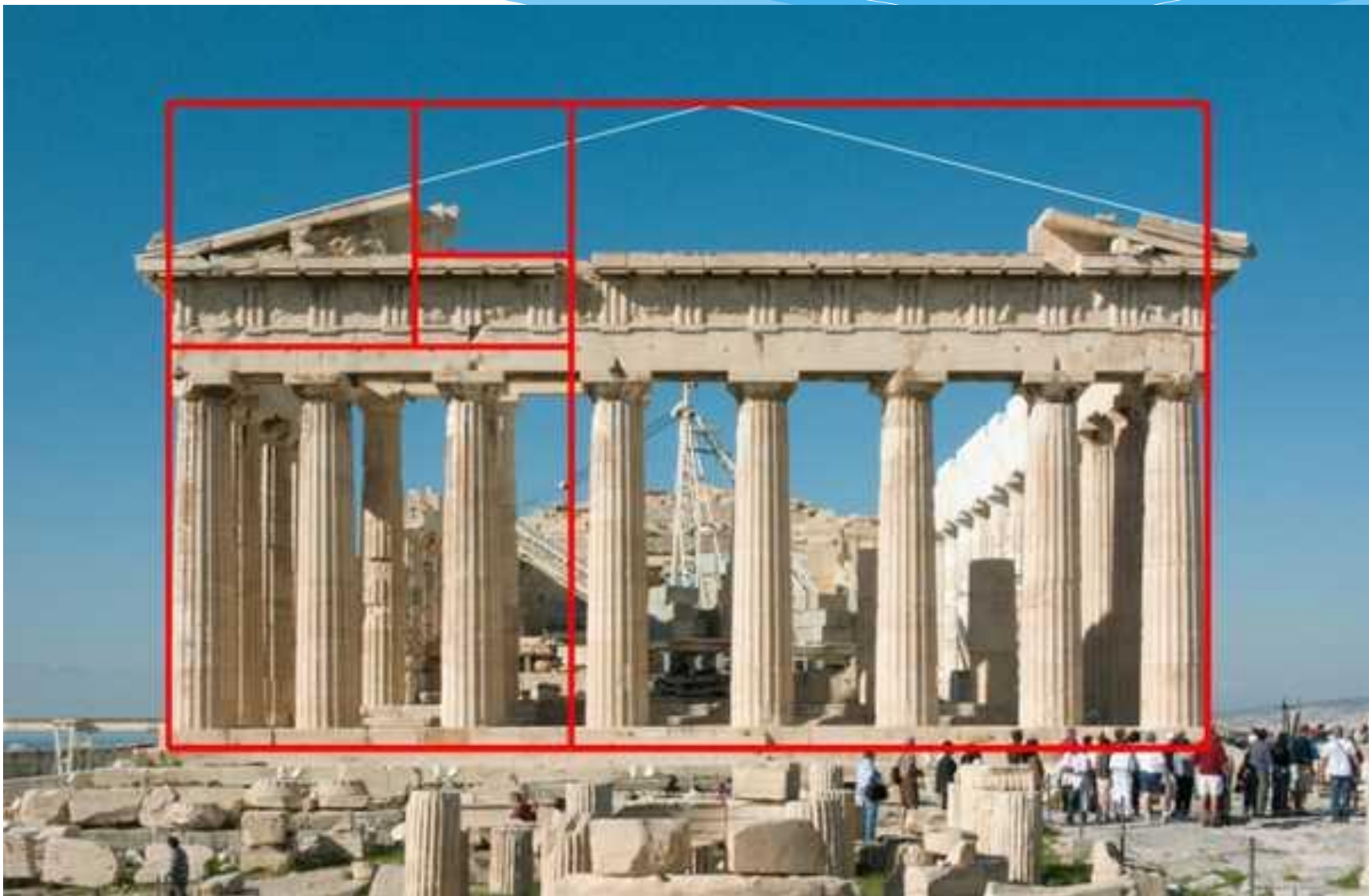
$$\Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618; \Phi_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Золотое сечение в природе и пропорциях человека

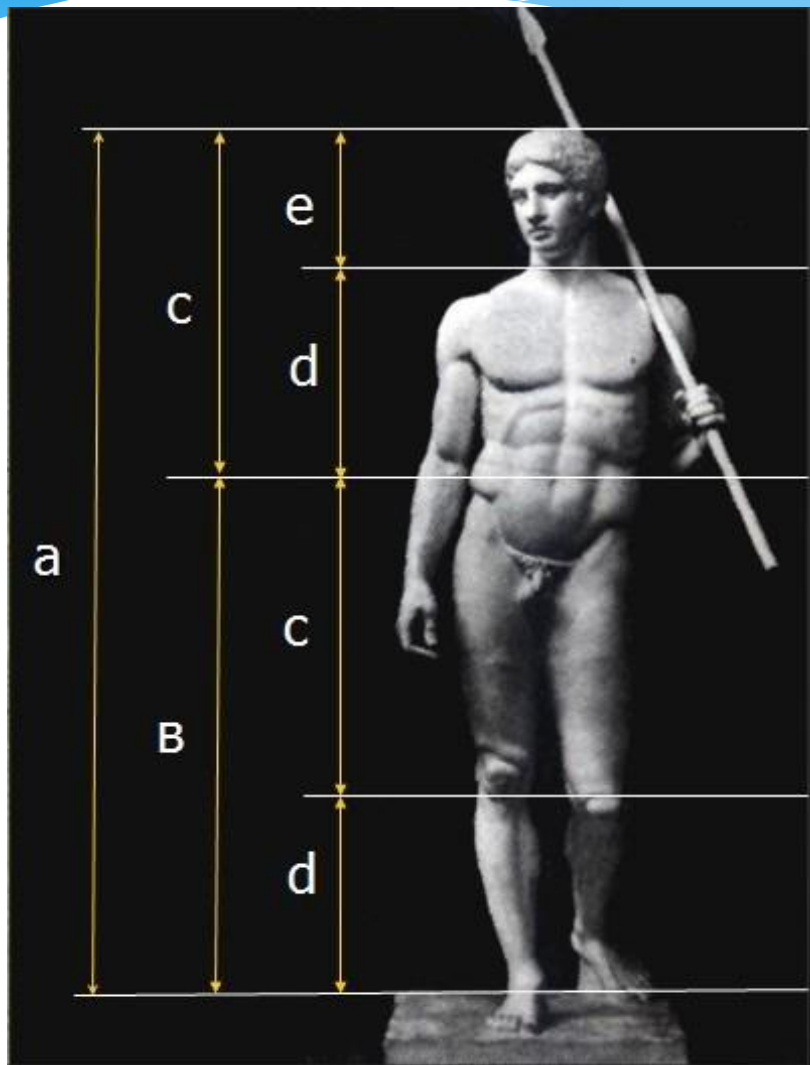


Золотое сечение в античной архитектуре

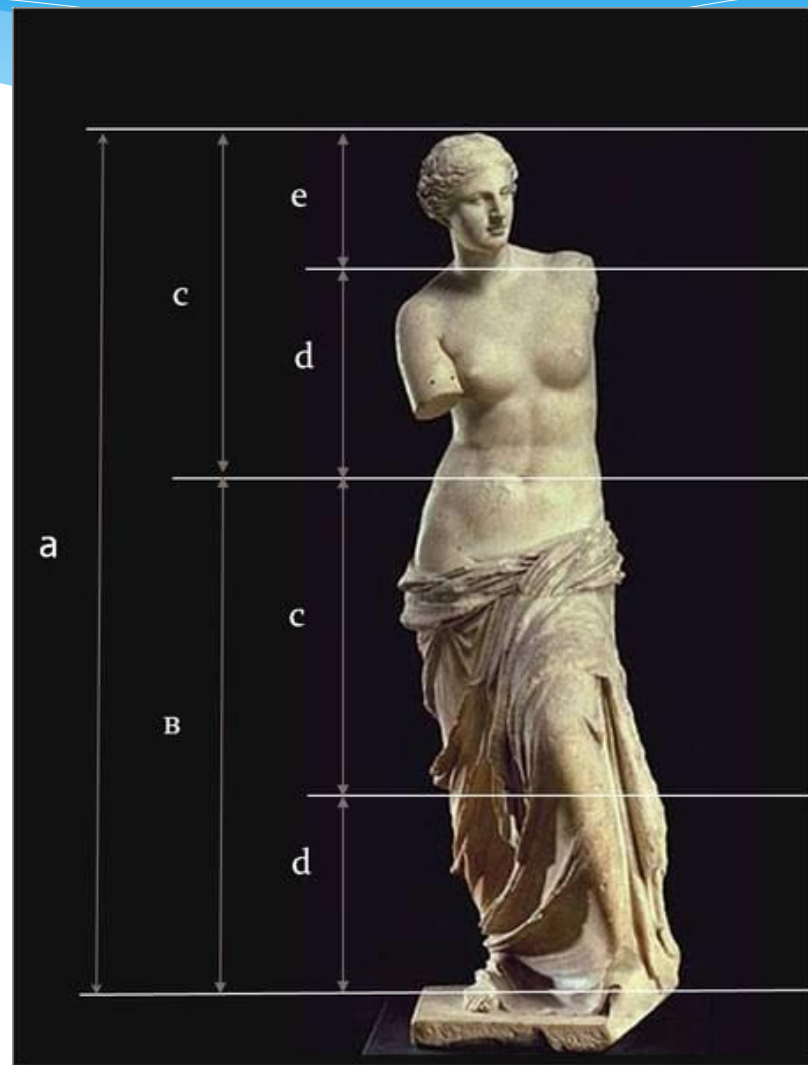


Парфенон

Золотое сечение в античной скульптуре

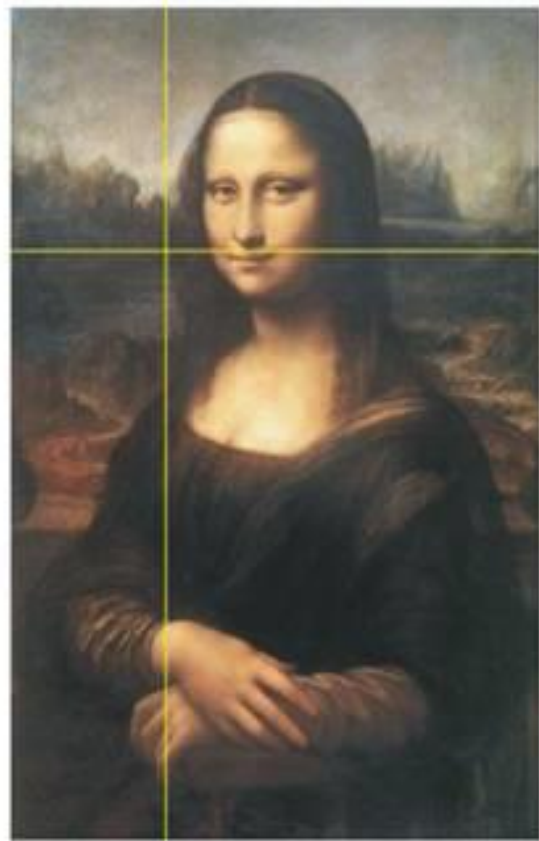


Поликлет. Дорифор



Венера Милосская

Золотое сечение в живописи

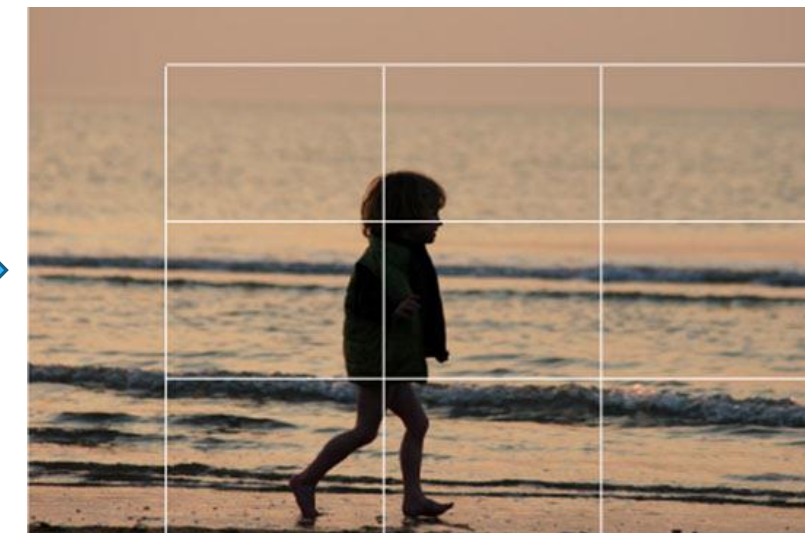
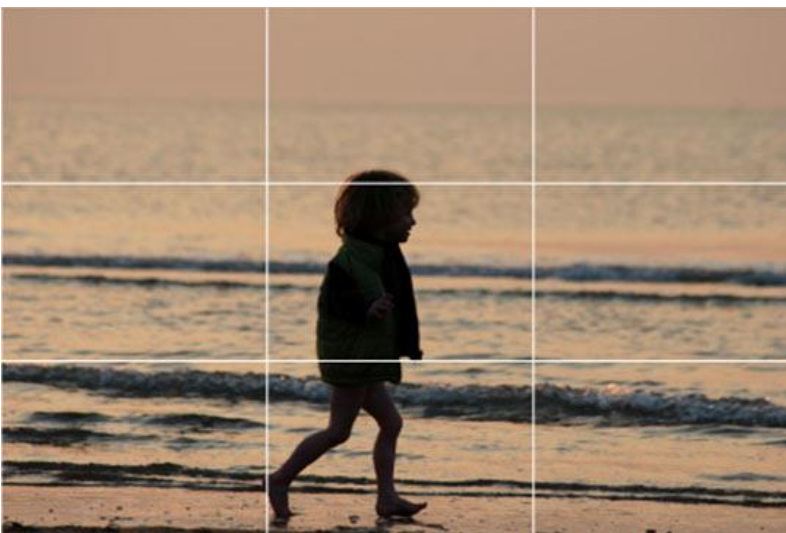


Леонардо да Винчи. Дама с горностаем
Мадонна Литта
Джоконда

Золотое сечение в живописи



В. Перов. Охотники на привале



ВСЕ МОЛОДЦЫ!!!



Головоломка

Записать 31 пятью тройками